TD n°10: Théorème de factorisation de Hadamard

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un †[†] sont à faire en priorité, ceux marqués d'un [†] sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Le but de ce TD est de manipuler le théorème de Hadamard dans un premier temps, puis de le démontrer dans un second.
Soit f une fonction entière. On définit l'ordre ρ de f comme

$$\rho = \inf\left\{\alpha > 0 : |f(z)| \leqslant Ae^{B|z|^\alpha},\ A, B \text{ constantes } > 0, |z| \text{ assez grand}\right\}.$$

Théorème (Factorisation de Hadamard)**.** *Soit f une fonction entière d'ordre $\rho \geqslant 0$, et $p = \lfloor \rho \rfloor$. On note*

$$E_p(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right).$$

Il existe un unique polynôme $Q(z)$, de degré au plus p, et un entier $m \geqslant 0$ tels que

$$f(z) = z^m e^{Q(z)} \prod_{n\geqslant 1} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Conséquences du théorème

Exercice 1. Calculs d'ordres et produits connus.

1. Calculer les ordres de $z \mapsto P(z)e^{Q(z)}$ avec P, Q polynômes, et des fonctions trigonmétriques $\sin, \cos$.

2. A l'aide du théorème de Hadamard, retrouver les produits pour le sinus et la fonction Γ (en admettant que la fonction entière $\frac{1}{\Gamma}$ est d'ordre 1 : c'est une extension à $\mathbb{C}$ de la formule de Stirling). Trouver une formule de produit pour le cosinus.

Exercice 2. Petit théorème de Picard.
Soit f une fonction entière non-constante d'ordre $\rho < \infty$.

1. Démontrer que f atteint tout nombre complexe sauf éventuellement un.

2. Démontrer que si ρ n'est pas entier, alors f atteint chaque point de son image une infinité de fois.

3. Supposons que ρ est entier. Démontrer que si f n'est pas un polynôme, alors f atteint tout nombre complexe une infinité de fois, sauf éventuellement un, et expliciter le cas où un nombre n'est atteint qu'un nombre fini de fois.

Exercice 3. Somme d'inverse de racines.
Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière d'ordre ρ, on note $(\lambda_n)_n$ ses racines comptées avec multiplicité, rangées par ordre croissant de module. On suppose également que $a_0 \neq 0$.

1. On suppose dans cette question que $\rho < 1$. Démontrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\lambda_n} = -\frac{a_1}{a_0}.$$

2. On fixe N un entier, $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{N}}$, et on pose $g_N(z) = \prod_{j=0}^{N-1} f(\zeta^j z)$.

[†]Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

(a) Démontrer que $g_N(z) \in \mathbb{C}[\![z^N]\!]$, et que le coefficient de z^{kN} est un polynôme homogène en les a_i de degré N, faisant intervenir uniquement des a_i avec $i \leqslant kN$.

(b) Supposons que f est un polynôme de degré d, démontrer en considérant la matrice compagnon de f que les coefficients de g_N sont en réalité des polynômes à coefficients entiers en les a_i.

(c) Démontrer que les coefficients de g_N sont des polynômes homogènes à coefficients entiers en les a_i également quand f est une série entière.

3. Supposons que $N > \rho$, démontrer que
$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{\lambda_n^N}$$
est un polynôme de degré $\leqslant N$ à coefficients entiers en les a_i/a_0, en particulier si f est à coefficients rationnels alors $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{\lambda_n^N}$ aussi.

4. Retrouver $\zeta(2)$ de cette manière et démontrer que $\zeta(2n) \in \pi^{2n}\mathbb{Q}$.

5. Si $N > \rho$, démontrer que
$$\alpha \mapsto \sum_{\lambda : f(\lambda) = \alpha} \frac{1}{\lambda^N}$$
est une fonction rationnelle en α, avec un pôle d'ordre $\leqslant N$ en $\alpha = f(0)$.

6. Démontrer, pour $t \in [-1, 1]$ non nul que
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\arcsin(t) + 2n\pi)^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\pi - \arcsin(t) + 2n\pi)^2} = \frac{1}{t^2}.$$

Démonstration du théorème

Exercice 4. Formule de Jensen.
Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(0, R)$, telle que $f(z) \neq 0$ pour $|z| = R$ et $f(0) \neq 0$. On note $a_1, ..., a_N$ les zéros de f avec multiplicités. Démontrer l'égalité
$$\log|f(0)| = \sum_{n=1}^{N} \log|a_n/R| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| d\theta.$$
On pourra considérer la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{n=1}^{N}(z - a_n)}$ et appliquer le théorème de Cauchy à une fonction holomorphe bien choisie.

Exercice 5. Zéros d'une fonction entière d'ordre fini.
Soit f une fonction entière d'ordre $\rho < \infty$. On note $(a_n)_n$ les zéros de f, par ordre croissant de module et avec multiplicités, et $N_f(R)$ le nombre (avec multiplicités) de zéros de f de module $\leqslant R$.

1. (a) Démontrer que si $R > 0$ et $a_1, ..., a_N$ sont les racines de f de module $< 2R$, on a
$$\sum_{n=1}^{N} \log \frac{2R}{|a_n|} \geqslant \log(2) N_f(R).$$

   (b) En déduire que pour $\alpha > \rho$, il existe une constante $C > 0 \in \mathbb{R}$ telles que pour R assez grand, on a
$$N_f(R) \leqslant CR^{\alpha}.$$

2. Démontrer que pour $\beta > \rho$, la somme
$$\sum_{n \geqslant 1} |a_n|^{-\beta}$$
converge.

Exercice 6. Théorème de factorisation de Hadamard
Soit f une fonction entière d'ordre $\rho \geqslant 0$. On pose, pour tout cet exercice, $p = \lfloor \rho \rfloor$, et les (a_n) sont la suite des zéros de f avec multiplicité, rangés par ordre croissant de module.

1. Démontrer à l'aide des exercices 5 et du théorème de factorisation de Weierstrass qu'il existe un entier $m \geqslant 0$ et une fonction entière g telle que :
$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n \geqslant 1} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

2. Pour prouver le théorème de Hadamard, il suffit de prouver que g est un polynôme. Pour ce faire, on veut minorer le produit des $E_p(z/a_n)$ - on commence par traiter les facteurs pour lesquels a_n est grand devant z.
   (a) Démontrer que pour $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, on a
   $$E_p(z) = \exp\left(-\sum_{n \geqslant p+1} \frac{z^n}{n}\right).$$
   (b) Démontrer que pour $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ et $\rho < \alpha < p+1$, on a
   $$|E_p(z)| \geqslant e^{-2^{\alpha-p-1}c|z|^\alpha}.$$
   (c) En déduire que pour tout $p+1 > \alpha > \rho$, il existe une constante $C > 0$ telle que
   $$\left|\prod_{n:|2z| \leqslant |a_n|} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \geqslant e^{-C|z|^\alpha}.$$

3. On s'occupe à présent des facteurs pour lesquels a_n est petit devant z, lesquels sont en nombre fini.
   (a) Démontrer que si $|z| > \frac{1}{2}$, alors pour tout $\alpha > \rho$ il existe une constante $C > 0$ telle que :
   $$|E_p(z)| \geqslant |1 - z| e^{-C|z|^\alpha}.$$
   (b) Démontrer que si $z \notin \bigcup_{n \geqslant 1} \mathbb{D}(a_n, |a_n|^{-p-2})$, alors
   $$\prod_{n:|2z| > |a_n|} \left|1 - \frac{z}{a_n}\right| \geqslant (2|z|)^{-(p+3)N_f(2|z|)}.$$
   (c) En déduire que pour $\alpha > \rho$, pour $\big||z| - |a_n|\big| > |a_n|^{-p-2}$ (pour tout n) et $|z|$ assez grand, on a
   $$\left|\prod_{n \geqslant 1} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \geqslant e^{-C|z|^\alpha}.$$

4. Démontrer que pour $\alpha > \rho$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour $|z|$ assez grand et $\big||z| - |a_n|\big| > |a_n|^{-p-2}$ (pour tout n):
$$|e^{g(z)}| \leqslant e^{C|z|^\alpha}.$$

5. (a) Soit h une fonction entière, u sa partie réelle, $R > 0$ un réel. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a
   $$-\frac{h^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \left(CR^\alpha - u(Re^{i\theta})\right) e^{-in\theta} d\theta.$$
   (b) En déduire que si $u(Re^{i\theta}) \leqslant CR^\alpha$, alors
   $$|h^{(n)}(0)| \leqslant 2Cn!R^{\alpha-n} - 2n!u(0)R^{-n}.$$

6. Démontrer le théorème de factorisation de Hadamard.